Die Innenwelt des Beweisens im Mathematikunterricht
Vergleiche von französischen und deutschen Mathematikstunden

Christine Knipping, Hamburg (Germany)

Abstract:
This empirical study reports on proving processes in everyday classroom practices in French and German geometry teaching. Classroom observations and comparative analyses presented in the study focus on units in which the Pythagorean Theorem was taught. The theoretical framework is based on epistemological and didactical research that asserts that justification and development of knowledge cannot be separated from each other within proving, nor can they be separated from their context of origination. This suggests a dialectic understanding of proofs which is in fact the theoretical basis of this study. From this perspective the empirical study first addresses the mathematical contexts of the proving processes in the units observed and then analyses argumentations within these processes.

Kurzreferat:

In der vorliegenden Studie wird alltägliche Unterrichtspraxis von Geometrieunterricht in Deutschland und Frankreich untersucht. Es werden Unterrichtsbeobachtungen und vergleichende Analysen von Unterrichtseinheiten zum Satz von Pythagoras dargestellt. Der theoretische Rahmen der Untersuchung basiert auf epistemologischen und didaktischen Arbeiten, die zeigen, dass Wissensentwicklung und -begründung in Beweisen weder voneinander getrennt betrachtet werden können, noch isoliert vom Kontext ihrer Entstehung. Dies legt ein dialektisches Verständnis von Beweisen nahe, das den theoretischen Hintergrund der vorliegenden Arbeit bildet. Dieser Perspektive entsprechend sind in der empirischen Untersuchung sowohl Analysen des mathematischen Kontextes der Beweise in den beobachteten Stunden als auch Argumentations-Analysen der Beweisprozesse durchgeführt worden.

ZDM-Classification: A73, C63, C73, D13, E53, G43

Einleitung
Mathematik ist kontextunabhängig, a- bzw. überkulturell, sozusagen frei von „Spuren menschlicher Herkunft" (Mannheim 1931, 256). *„Was einmal bewiesen ist, ist wahr für immer und wahr für alle"*: So beschreibt Bettina Heintz treffend in ihrem Buch *‚Die Innenwelt der Mathematik'* eine Auffassung von Mathematik und Beweisen in der Mathematik, die weit verbreitet ist (Heintz 2000, 18). Diese Auffassung prägt auch Vorstellungen von der Bedeutung von Beweisen im Mathematikunterricht. Die Ergebnisse meiner Arbeit (Knipping 2003, 2001 und 1999) zeigen ein anderes Bild und bestätigen damit Ergebnisse international-vergleichender Studien, die deutlich machen, dass vergleichbare curriculare Ziele im Mathematikunterricht nicht in universaler Weise ausgefüllt werden. Cogan und Schmidt weisen angesichts ihrer empirischen Untersuchungen ebenfalls die Kulturunabhängigkeit von Mathematik und Mathematikunterricht zurück: *„For example, many believe, numeration is numeration' – the concept is the same across all contexts –, but these common expectations are false."* (Cogan & Schmidt 1999, 77). Kulturelle Differenzen von Unterricht, ihre Bedeutung und Konstitution in der Unterrichtspraxis sind zunehmend auch von Interesse in empirischen Forschungsarbeiten der Vergleichenden Erziehungswissenschaft (Alexander et al. 1999; Broadfoot et al. 2000; Pepin 1999 und 1997). In der Mathematikdidaktik jedoch ist das Potential ländervergleichender Unterrichtsforschung nur wenig genutzt worden, obgleich vergleichende Forschung sich in vielen Disziplinen, etwa der Politikwissenschaft, als äußerst fruchtbar auch für Theorieentwicklung gezeigt hat.

In meiner Dissertation (Knipping 2003), deren zentrale Ergebnisse ich hier vorstellen möchte, werden Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis in Frankreich und Deutschland empirisch in vergleichenden Analysen unter folgenden Fragestellungen erforscht:

- Welche Typen von Beweisen und Beweisprozessen finden sich in alltäglicher Unterrichtspraxis französischer und deutscher Mathematikklassen?
- Wie unterscheiden sich Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis? Welcher Stellenwert kommt Beweisen im Unterricht zu? Wie werden mathematische Aussagen im Unterricht begründet?
- Welche Funktionen haben Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis?

Im Vergleich des von mir beobachteten und analysierten Unterrichts zeigen sich verschiedene Typen unterrichtlicher Beweisprozesse, die auf unterschiedliche epistemische Funktionen von Beweisprozessen im Unterricht hinweisen. Die Unterrichtspraxis von Lehrpersonen gerät bei dieser Untersuchung mit in den Blick, Fokus der Untersuchung ist jedoch die epistemische Perspektive auf Beweisprozesse in alltäglichem schulischen Unterricht. Meine ländervergleichenden Analysen haben sich dabei als gewinnbringend für diese Perspektive und damit für die mathematikdidaktische Forschung gezeigt und machen zugleich deutlich, dass Beweisprozesse im Mathematikunterricht auch durch kulturell bedingte Unterrichtspraktiken geprägt sind.

Theoretischer und methodologischer Ansatz
Beweise im Mathematikunterricht von ihrer unterrichtlichen Praxis und ihrem Kontext im Unterricht her zu verstehen, entspricht wissenschaftstheoretischen und didaktischen Überlegungen, die einen universalen formalen Beweisbegriff als problematisch zurückweisen. Historische und wissenschaftstheoretische Arbeiten zeigen, dass Beweise in der Mathematik wesentlich durch den spezifischen Kontext ihrer Genese charakterisiert sind (Lakatos 1976; Rav 1999). Wissensbegründung und -entwicklung lassen sich beim Beweisen nicht voneinander trennen und legen damit ein dialektisches Beweisverständnis nahe wie es etwa Jahnke in seiner

Arbeit *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem* formuliert hat (Jahnke 1978). Nicht nur die Art der Begründung, sondern auch ihr Inhalt, die Bedeutung mathematischer Begriffe und Zusammenhänge ist wesentlich für Beweisprozesse. Ein solches Verständnis von Beweisen bildet die theoretische Grundlage meiner Dissertation.

Die Bedeutung von Beweisen für mathematische Lernprozesse ist in der mathematikdidaktischen Forschung von Hanna und anderen theoretisch reflektiert worden (Hanna 1996 und 1989; Villiers 1990). In empirischen Arbeiten sind diese Überlegungen bisher nur in Studien zu individuellen Beweisprozessen von Schülerinnen und Schülern bzw. Schülerpaaren, insbesondere unter kognitiven Aspekten, untersucht worden (Balacheff 1988 und 1987; Healy & Hoyles 1998 und 1995; Reid 1995 und 1999; Reiss et al. 2002 und 2001). Kollektive Beweisprozesse in alltäglichem Unterricht haben außer in den Arbeiten von Sekiguchi (1991) und Herbst (1998) bisher kaum Beachtung gefunden. In meiner Dissertation habe ich durch Vergleiche von deutschen und französischen Klassen Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis reflektiert und beschrieben. Bei einem solchen komparativen Vorgehen bieten sich grundsätzlich zwei Möglichkeiten an:

1) Die Auswahl von Fällen, in der vorliegenden Arbeit deutsche und französische Klassen, ist mit der Erwartung verbunden, möglichst unterschiedliche Prozesse in den Blick zu bekommen. Die Suche nach Unterschieden kann daher direkt als Forschungsfrage formuliert werden: *Welche Unterschiede zwischen französischem und deutschem Mathematikunterricht lassen sich finden?* Unterschiede zwischen französischem und deutschem Mathematikunterricht werden damit zum Blickwinkel von dem aus Unterricht analysiert wird. Ein solches Vorgehen, das sich z.B. in ethnographischen Studien findet, ist bewusst nicht durch theoretische Kategorien geleitet. Es ist ein eher offenes Vorgehen.

In meiner Dissertation bin ich dagegen stärker durch theoretische Überlegungen geleitet vorgegangen. Der epistemologische Fokus der Arbeit, der nach dem Verhältnis von Wissensentwicklung und –begründung in Beweisprozessen in der Unterrichtspraxis fragt, hat es möglich gemacht, Unterschiede in der Tiefenstruktur von Beweisprozessen im Unterricht zu finden. Das von mir wissenschaftstheoretisch und didaktisch begründete Verständnis von Beweisen und das dadurch begründete Vorgehen in den Analysen der Daten hat Unterschiede hervorgebracht, die ohne die entwickelten theoretischen Perspektiven nicht hätten in den Blick genommen werden können. Damit habe ich eine zweite Möglichkeit genutzt, die sich in komparativen Analysen ebenfalls anbietet:

2) Die Auswahl der Fälle ist wie beim ersten Vorgehen ebenfalls dadurch geleitet, möglichst unterschiedliche Prozesse in den Blick zu bekommen. Im Weiteren ist aber nicht die Suche nach Unterschieden zwischen deutschen und französischen Klassen der Forschungsfokus gewesen sondern,

- erstens der Anspruch empirisch beobachtete Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis epistemologisch und mathematikdidaktisch zu fassen und
- zweitens durch die theoretische Perspektive auf die unterrichtlichen Prozesse deutlich werdende Unterschiede zwischen allen beobachteten Fällen aus dieser Perspektive sinnhaft zu verstehen und zu erklären.

Für die Analysen meines empirischen Materials habe ich daher aus wissenschaftstheoretischen und mathematikdidaktischen Überlegungen zu Beweisen und Funktionen von Beweisen wie auch zur Argumentationstheorie (Toulmin 1958) Forschungsfragen entwickelt, die konkrete Analysen meiner Daten möglich gemacht haben.

Kollektive Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis französischen und deutschen Mathematikunterrichts habe ich hinsichtlich folgender Fragen analysiert:

- Wie werden Beweisprozesse im Unterricht initiiert, realisiert und fortgeführt? (Kontext-Analysen)
- Wie wird in Beweisprozessen argumentiert? (Argumentations-Analysen)

Beide Fragen sind hinsichtlich der dialektischen Beziehung zwischen Wissensentwicklung und -begründung betrachtet worden und so konnten Beweisprozesse im Kontext ihrer unterrichtlichen Genese analysiert werden.

Durch die Komparation von Fällen, habe ich die Entwicklung idealtypischer Charakterisierungen von Beweisprozessen in der Unterrichtspraxis systematisch und intersubjektiv nachvollziehbar gemacht. Komparation meint dabei den permanenten Vergleich von Analysen von allen beobachteten Realitätsausschnitten *„von der ersten deutenden Annäherung an diese Ausschnitte bis zu späteren theoretischen Durchdringungen“* (Krummheuer & Brandt 2001, 78). Unterrichtsprozesse werden sowohl auf der Ebene der Kontext-Analysen als auch auf der Ebene der Argumentations-Analysen verglichen und eine Typenbildung durch fortschreitende Komparation angestrebt. Typenbildung im Sinne Max Webers, auf die ich mich beziehe, meint eine idealtypische Konstruktion eines Sinnzusammenhangs. Sie ist damit eine analytische Konstruktion bzw. ein Denkmodell mit dem Zweck, bedeutsame Eigenschaften sozialer Handlungen theoretisch zu isolieren und zu klären. Der Idealtypus bzw. die idealtypische Charakterisierung findet keine Entsprechung in der Wirklichkeit, bildet aber ein Verstehens- und Erklärungsmodell für die Wirklichkeit.

> „Verallgemeinerung bei qualitativer Forschung liegt in der schrittweisen Übertragung von Erkenntnissen aus Fallstudien und ihrem Kontext in allgemeinere und abstraktere Zusammenhänge, z.B. eine Typologie“ (Flick 1995, S. 256).

In diesem Sinne erhebe ich in meiner Dissertation den Anspruch auf Generalisierbarkeit meiner Ergebnisse. Es werden unterschiedliche Typen und Funktionen von Beweisprozessen in der Unterrichtspraxis aufgezeigt, die es möglich machen, Unterrichtspraxis zum Beweisen theoretisch zu analysieren. Dabei wird jedoch weder der Anspruch auf Vollständigkeit der Typen noch die Repräsentativität des beobachteten Unterrichts für deutschen oder französischen Mathematikunterricht erhoben.

Die Basis für die Konstruktion von idealtypischen Charakterisierungen von Beweisprozessen bilden in der vorliegenden Arbeit prototypische Fälle. Unter einem prototypischen Fall bzw. einem Prototyp wird ein Fall verstanden, der einen Typus *„im Sinne eines konkreten Musterstücks"* veranschaulicht (Zerssen 1973, 53). Ein Prototyp ist kein Typ im engeren Sinne, d. h. kein ideal gebildetes theoretisches Konstrukt. Vielmehr ist er ein Fall, der für eine Gruppe als repräsentativ in dem Sinne gelten kann, dass an ihm besondere Eigenschaften einer Gruppe von Fällen deutlich werden (Kluge 1999). Durch die Charakterisierung des Prototyps können anschaulich typische Merkmale herausgearbeitet werden. Prototypen bilden so einen Zwischenschritt der idealtypischern Konstruktion und Begriffsbildung. Die Komparation der Prototypen mit den weiteren Fällen ist auch hier entscheidend. Vor dem Gegenhorizont weiterer Fälle werden typische im Gegensatz zu individuellen Merkmalen deutlicher. Die dadurch konstruierten idealtypischen Charakterisierungen haben eine heuristische bzw. hypothesengenerierende Funktion, denn *„der ‚reine' Typus enthält eine Hypothese des möglichen Geschehens"* (Gerhardt 1991, 437). Die im weiteren diskutierten Fälle stellen Prototypen in diesem Sinne dar.

Methodisches Vorgehen

In der durchgeführten empirischen Untersuchung, die hier erstmals ganz präsentiert wird, sind Beweisprozesse in sechs französischen und sechs deutschen Klassen der Jahrgangsstufen 8/9 über einen Zeitraum von jeweils zwei Wochen beobachtet worden. Die Unterrichtseinheiten sind nach thematischen Gesichtspunkten ausgewählt worden und umfassen ausschließlich Themenbereiche der Geometrie. Analysen und Ergebnisse der insgesamt sechs Unterrichtseinheiten zum Satz von Pythagoras sollen hier vorgestellt werden. Französische und deutsche Lehrpläne, die ich vor Beginn der Erhebung analysiert habe, sehen Beweisen als explizites Thema zum ersten Mal in der 8./9. Klasse bzw. der 4ème in der Geometrie vor. Aus diesem Grund sind Unterrichtsbeobachtungen im Geometrieunterricht dieser Jahrgangsstufe durchgeführt worden.

Die Erhebungen sind an sechs Collèges im Großraum Paris und drei Gymnasien wie auch zwei Gesamtschulen in Hamburg durchgeführt worden. Zwei der beobachteten Fälle sind Klassen eines bilingualen Zweigs, die als hoch selektiv einzustufen sind. Ein Lehrer aus Bayern unterrichtete die deutsche Klasse dieses Zweigs.

Im Unterschied zu französischen Lehrplänen, die national gelten und damit für alle Klassen dieses Jahrgangs im Collège gleichermaßen bestimmend sind, bestehen in Deutschland auf Länderebene und bezüglich unterschiedlicher Schultypen wesentliche Unterschiede. Die Entscheidung, Untersuchungen in verschiedenen Collèges im Großraum Paris durchzuführen, stellt im Hinblick auf Beweise und Beweisprozesse daher in dieser Jahrgangsstufe aus meiner Sicht keine einschränkende Vorauswahl dar. Bei der Suche von Schulen ist darauf geachtet worden, dass bis auf eine bilinguale Klasse, deren Schülerschaft als in hohem Maße nach Leistung selektiert einzuordnen ist, nur „normale" Schulen, mit durchschnittlich heterogener Schülerschaft ausgewählt worden sind.

Bezüglich der deutschen Klassen stellt sich die Situation deutlich anders dar. Nicht nur lassen sich auf Länderebene Unterschiede in den thematischen Schwerpunkten der Lehrpläne finden, sondern viel bedeutender sind offensichtliche Unterschiede im Hinblick auf Beweise bei den verschiedenen Schultypen. Während bundesweit in den gymnasialen Lehrplänen dieser Jahrgangsstufen Beweisen ein besonderer Stellenwert zukommt, spielen Beweise in Lehrplänen von Haupt- und Realschulen bundesweit eine deutlich untergeordnete Rolle. In Gesamtschullehrplänen spiegelt sich diese unterschiedliche Bedeutung von Beweisen in der Regel in den verschiedenen Zielvorgaben für Kurse des oberen und unteren Leistungsniveaus. Die curricularen Vorgaben ließen damit bereits kaum erwarten, Beweise und Beweisprozesse außerhalb des Gymnasiums und gegebenenfalls des oberen Leistungsniveaus in Gesamtschulen beobachten zu können. Die Kontaktaufnahme mit Lehrerinnen und Lehrern bestätigte diese Einschätzung und der Versuch, auch bei der Auswahl deutscher Klassen möglichst nicht selektiv vorzugehen, ist aus diesen Gründen bereits zu einem frühen Zeitpunkt aufgegeben worden. Um überhaupt unterrichtliche Beweisprozesse in den Blick zu bekommen, habe ich mich daher entschieden, gezielt Gymnasialklassen und Gesamtschulklassen des oberen Leistungsbereiches zu untersuchen. Aussagen darüber, welche Funktion Beweisprozessen in der Unterrichtspraxis zukommt, lassen sich nur anhand von Unterricht machen, in dem derartige Beweisprozesse beobachtet werden können. Welcher Stellenwert Beweisen insgesamt in der Unterrichtswirklichkeit zukommt, kann und soll mit einer Untersuchung wie der vorliegenden nicht beantwortet werden.

Schließlich war meine Fallauswahl thematisch motiviert, denn Vergleiche von Beweisprozessen sollten auch inhaltlich möglich sein. Dabei habe ich mich, ausgehend von den durchgeführten Lehrplananalysen, auf folgende Themenbereiche der Geometrie beschränkt: Satz von Pythagoras, Strahlensätze und besondere Linien im Dreieck. Ein wesentliches Kriterium der inhaltlichen Auswahl war für mich die Maßgabe, dass der jeweilige mathematische Themenbereich sowohl in Deutschland als auch in Frankreich in der 8./9. Klasse unterrichtet wird. Aus diesem Grund fielen etwa die Kongruenzsätze, die im deutschen, nicht aber im französischen Unterricht dieser Klassenstufen vorkommen, als möglicher Themenbereich heraus. Der Satz von Pythagoras, der länderunabhängig von den meisten aus ihrer Schulzeit erinnert wird, $a^2+b^2=c^2$, erschien gerade deshalb besonders interessant.

Der beobachtete Unterricht ist durch Tonbandaufnahmen und digitale Fotos der Tafelbilder dokumentiert. Zudem sind Unterrichtsbeobachtungen in Form von Verlaufsprotokollen festgehalten worden, die ich nach jeder Stunde angefertigt habe. Anhand der Verlaufsprotokolle habe ich inhaltliche Kontext-Analysen der Beweisprozesse durchgeführt. Anhand der Protokolle konnten zudem diejenigen Unterrichtsphasen identifiziert werden, in denen Beweise zum unterrichtlichten Gegenstand gemacht werden. Die diesen Unterrichtsabschnitten entsprechenden Tonband-aufnahmen wurden transkribiert und sind neben den Verlaufsprotokollen wesentlicher Gegenstand der Analysen. Die Transkripte ermöglichen die genaue Analyse der Unterrichtsdiskurse während der Beweisprozesse, die für die Rekonstruktion von Argumentationen notwendig ist. Zentrale Ergebnisse meiner Dissertation möchte ich im Folgenden in Form von fünf Thesen zusammenfassen.

Ergebnisse der Arbeit

Beweis-Kontexte und diskursive Praktiken

Beweise und Beweisprozesse im Unterricht lassen sich nicht isoliert betrachten. Sie sind, sofern sie auftreten, eingebunden in unterrichtliche Beweis-Kontexte, d.h. das Gefüge von Satz, Beweis und Aufgaben, und diskursive Praktiken, die sich durch Argumentations-Analysen rekonstruieren lassen.

Hinführung, Entwicklung und Begründung des Satzes von Pythagoras und schließlich seine Anwendung in Aufgaben, zeigten in dem von mir beobachteten deutschen und französischen Unterricht unterschiedliche Muster. Beweisprozesse, die durch eine Aufgabe motiviert und eingeleitet werden, wie in den beobachteten deutschen Klassen, haben eine andere Funktion als solche, die durch die vorausgehende Formulierung des Satzes von Pythagoras initiiert werden, was ich ausschließlich in den französischen Klassen beobachten konnte. Durch komparative konnten Analysen auf der Ebene der Kontext-Analysen zwei Beschreibungen von Beweisprozessen gewonnen werden, die durch „einsehen, dass“ und „begründen, warum“ idealtypisch charakterisiert werden.

Die Ergebnisse der Kontext-Analysen sind durch Analysen unterrichtlicher Beweisdiskurse, die zunächst unabhängig von den Kontext-Analysen durchgeführt wurden, ergänzt worden. Typen von Beweisprozessen, die sich bereits andeuteten, haben so an Bedeutung und Schärfe gewonnen.

Durch Argumentations-Analysen, in denen ich Argumentationen lokal, d.h. bezogen auf einzelne Argumentationsschritte, und global, d.h. bezogen auf die Gesamtstruktur der Argumentationen, untersucht habe, konnten dabei zwei Arten von Beweisdiskursen charakterisiert werden. Die komparativen Analysen zeigten, dass sich unterrichtliche Argumentationen hinsichtlich ihrer Argumentationsbasis und ihrer Aussageformen, sowie ihrer argumentativen Gesamtstrukturen unterscheiden. Dabei zeigte sich ebenfalls, dass die analysierten Fälle sich länderspezifisch in je einem Typ wiederfinden. Dies soll im Folgenden näher ausgeführt werden.

Typen von Beweisprozessen

Beweisprozesse des ersten Typs (Prototyp „Nissen“) werden ausgehend von Berechnungsproblemen initiiert. Sie können idealtypisch als „einsehen, dass“ charakterisiert werden. In Beweisprozessen des zweiten Typs (Prototyp „Pascal“) steht die Begründung mathematischer Aussagen mit Hilfe bekannter Begriffe und Beziehungen in Beweisen von Theoremen wie auch in Aufgaben im Vordergrund. Idealtypisch können diese Beweisprozesse als „begründen, warum“ beschrieben werden.

‚Einsehen, dass'

Beweisprozesse des ersten Typs, die ich als *„einsehen, dass“ chara*kterisiert habe und die ich ausschließlich in deutschen Klassen rekonstruieren konnte, werden ausgehend von Berechnungsproblemen initiiert. In den analysierten Unterrichtseinheiten waren dies in der Regel realitätsbezogene Probleme wie am Beispiel des Prototyp „Nissen“ deutlich wird.[1]

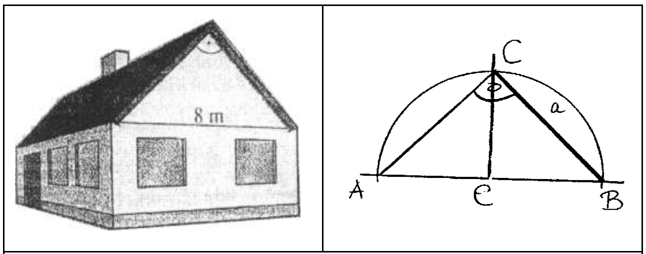


Abb. 1 Fall Nissen - Berechnungsproblem

Die Entwicklung, Formulierung und Begründung eines allgemeinen Zusammenhangs wird von hier aus aufgenommen. Die Suche nach einer allgemeinen Beziehung ist damit von Anfang an durch ein konkretes Problem motiviert. Eine konkrete Deutung des im Weiteren entwickelten allgemeinen Zusammenhangs wird so bereits angeboten. Nicht allein die Formulierung und Herleitung des Satzes, sondern das kollektive Verständnis über seine anschauliche Bedeutung ist charakteristisch für diesen Typ unterrichtlicher Beweisprozesse. Das Berechnungsproblem am Anfang hat hier generischen und damit paradigmatischen Charakter. Beispielhaft veranschaulicht es die Bedeutung des gesuchten allgemeinen Zusammenhangs durch Bezug auf einen möglichen Anwendungskontext. Ein allgemeiner Zusammenhang soll als Lösung des konkreten Problems gefunden werden und mündet in die Suche eines verallgemeinerbaren Verfahrens, um gleiche oder ähnliche Probleme lösen zu können.

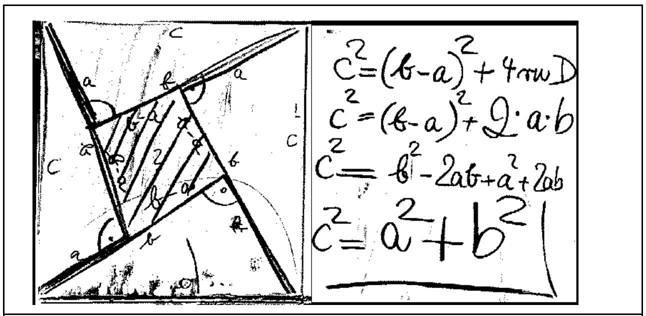


Abb. 2 Fall Nissen - Arithmetischer Beweis

Das Ausgangsproblem wird gemeinsam betrachtet und

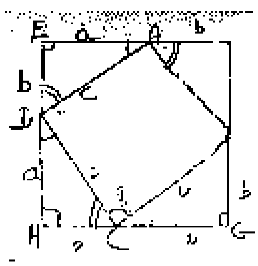
[1] Die in diesem Artikel abgedruckten Abbildungen von Zeichnungen an der Tafel können bei der Autorin als bessere Reproduktion angefordert werden.

gedeutet, Lösungsstrategien gemeinsam entwickelt und begründet. Das paradigmatische anwendungsbezogene Beispiel wird mathematisch gedeutet und so eine allgemeingültige Beziehung anhand des Spezialfalles entwickelt. In diesem Prozess der Einsicht bleibt die Lehrperson Garant des gültigen und akzeptablen Wissens, welche den Schülerinnen und Schülern „hilft", die Zusammenhänge einzusehen. Dies bedeutet, aufgrund des Verständnisses von bekannten Begriffen und Verfahren an einem paradigmatischen Beispiel zur Einsicht neuer Sachverhalte zu gelangen. Die Funktion von Beweisprozessen ist hier, einzusehen, dass mathematische Sätze gültig und bedeutsam sind.

„Begründen, warum"

In Beweisprozessen des Typs „begründen, warum" spielen weniger Entdeckungen von mathematischen Sachverhalten eine Rolle als vielmehr die systematisch angeführten Gründe, warum die zu begründenden Aussagen gelten. Dabei steht im Vordergrund, bereits bekannte Begriffe und Sätze zu systematisieren und anzuwenden. Auch kommt der Analyse und Interpretation von geometrischen Konfigurationen dabei in der Regel ein hoher Stellenwert zu. Es werden Geltungsansprüche formuliert, begründet und gemeinsam im Unterricht geprüft. Die Formulierung einer allgemeinen Aussage, einer mathematischen Beziehung, steht am Anfang dieses Typs von Beweisprozessen, der nur in den französischen Klassen rekonstruiert werden konnte.[2]

Da ABCD vier Seiten der gleichen Länge hat, ist es eine Raute.
Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind komplementär.

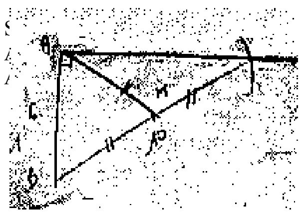


Die rechtwinkligen Dreiecke DHC und BGC sind deckungsgleich, die einander entsprechenden Winkel sind gleich.
Daraus kann gefolgert werden, dass die Winkel BCG und DCH komplementär sind.
HCG = 180°, woraus folgt
BCD = 180 – 90 = 90
ABCD ist ein Quadrat.

F (ABCD) = c x c = c^2
F (ABCD) = $(a+b)^2 - 2ab$
Fläche EFGH
– Fläche der 4 Dreiecke
(Fläche der 2 Rechtecke)
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
also F (ABCD) = $a^2 + 2ba + b^2 - 2ab$
$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Abb. 3 Fall Pascal - Arithmetischer Beweis

Der Satz hat zu Beginn des Beweisprozesses zunächst den Status einer noch nicht öffentlich in der Klasse begründeten und damit noch nicht öffentlich gültigen Aussage. Die Begründung von Aussagen ist weniger durch die Frage der Wahrheit oder Falschheit motiviert, sondern durch die Einschreibung des Wissens in das Wissen der Klasse. Die Klasse schreibt gewissermaßen an einem Buch, neue Seiten werden mit Bezug auf vorherige hinzugefügt. Die Begründung des neuen Satzes bedeutet, auf Sätze, Definitionen und Techniken zurückzugehen, die in der Klasse bereits als *öffentliches Wissen* anerkannt sind. Seine mündliche und schriftliche Begründung an der Tafel, kennzeichnen diesen Typ von Beweisprozess, die zugleich Vorbild für die Lösung von Aufgaben ist. Die Funktion von Beweisprozessen liegt hier in der kollektiven Begründung von Geltungsansprüchen. *Öffentlich* werden Geltungsansprüche geprüft und ausgehandelt.



In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Mitte der Hypotenuse der Mittelpunkt des Umkreises.
MA=MB=MC
BC= 2x5 = 10
AC = ?
Nach dem Satz von Pythagoras gilt in dem in A rechtwinkligen Dreieck: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
$100 = 36 + AC^2$
$AC^2 = 100 - 36 = 64$
AC = $\sqrt{64}$ = 8

Abb. 4 Fall Pascal – Schriftliche Lösung einer Aufgabe

In Beweis- und Begründungsprozessen werden entsprechend bereits im Unterricht ausgehandelter Kriterien für akzeptable Argumente, neue Zusammenhänge begründet und gerechtfertigt. Die Funktion von Beweisprozessen in diesem Unterricht kann als „begründen, warum" beschrieben werden. In Beweisprozessen dieser Art kommt der Ausweisung logisch-systematischer Kohärenz bereits bekannten Wissens eine entscheidende Bedeutung zu. Diese Kohärenz soll garantiert und erhalten werden. Im Unterricht zeigt sich dies unter anderem in der Betonung schriftlicher Beweise. Auch wenn in Aushandlungsprozessen der Lehrperson eine besondere Rolle zukommt, sind die gemeinsam etablierten Kriterien für gültige Beweise der entscheidende Maßstab für die Beurteilung der hervorgebrachten Argumente. Schülerinnen und Schüler sind gefordert, eigene akzeptable Begründungen zu entwickeln und diese als solche auszuweisen. Die Verantwortung für Geltungsansprüche liegt damit bei den Lernenden wie auch der Lehrperson.

Arten von Argumentationen

In den unterrichtlichen Beweisprozessen des Satzes von Pythagoras lassen sich unterschiedliche Arten von Argumentationen rekonstruieren. „Anschauliche" Argumentationen, die durch Wechsel verschiedener Darstellungsebenen und Sichtweisen charakterisiert sind, unterscheiden sich dabei grundlegend von „begrifflichen" Argumentationen, in denen logisch korrekt auf der Basis von mathematischen Begriffen und Beziehungen argumentiert wird. Dies soll im Folgenden kurz ausgeführt werden.

Die Bezugnahme auf Zeichnungen etwa ist in „anschaulichen" Argumentationen gewissermaßen Teil der Argumentation. Garanten bleiben daher in *anschaulichen* Argumentationen häufig auch implizit. Einzelne Aussagen werden nicht als einzelne Schritte in einer Argumentationskette entwickelt, sondern gleichzeitig anhand von Zeichnungen hervorgebracht. Dadurch werden auch die Konklusionen nicht als Ergebnisse einzelner argumentativer Schritte konstituiert

[2] Die Tafelinschriften, die im Folgenden neben den Abbildungen abgetippt wiedergegeben sind, habe ich hier zum besseren Verständnis aus dem Französischen übersetzt.

sondern zugleich in und durch die Veranschaulichung anhand der Zeichnung. Dies unterscheidet *anschauliche* Argumentationen von *begrifflichen* Argumentationen, in denen argumentative Zusammenhänge primär diskursiv hergestellt werden. Konklusionen werden in begrifflichen Argumentationen nicht empirisch oder gedanklich *eingesehen*, sondern durch einen Begriff erschlossen. Es werden zwar auch Daten anhand von Zeichnungen veranschaulicht und formuliert, doch werden die aus ihnen gezogenen Schlüsse nicht *anschaulich*, sondern *begrifflich* vollzogen. Die Nennung von Gründen, d.h. Garanten, ist in dieser Art Argumentationen zentral. Durch sie werden Konklusionen gefolgert, die im nächsten Argumentationsschritt als Daten wiederverwendet, gewissermaßen „recycelt" werden können.

In begrifflichen Argumentationen deduktiven Typs wird logisch korrekt argumentiert, obgleich dies in den hier analysierten Unterrichtsszenen in keiner logisch korrekten Form ausgedrückt wird. Begriffe und mathematische Beziehungen, die in diesen Schlüssen zu Grunde gelegt werden, sind in der Regel alltagssprachlich gefasst. Auch in Argumentationen des abduktiven Typs wird auf der Basis eines Begriffs oder einer begrifflichen Beziehung argumentiert. Im Unterschied zu deduktiven Argumentationen wird hier jedoch von einer Konklusion her auf ein mögliches Datum zurückgeschlossen. Abduktiven Argumentationen kommt innerhalb der Gesamtstruktur der Beweisdiskurse eine besondere Bedeutung zu, die im Folgenden näher ausgeführt wird.

Gesamtstruktur von Argumentationen

Die argumentative Struktur der Beweisprozesse ist in der Regel komplex. Einzelne Argumentationsstränge sind ineinander geschachtelt. So werden beispielsweise einzelne Aussagen, auf denen weitere Argumentationen aufbauen, während des Prozesses ausführlich begründet. In den Argumentations-Analysen habe ich daher nicht nur verschiedene Argumentationen einzelner Beweisschritte in den Blick genommen sondern auch globale Muster in der Gesamtstruktur der Beweisprozesse herausgearbeitet. Eine solche Analyse ermöglicht das Modell von Toulmin nicht, das ich bei den Analysen einzelner argumentativer Schritte verwendet habe. Daher habe ich für die Analyse der argumentativen Gesamtstruktur der Beweisprozesse eine eigene schematische Darstellung entwickelt. Ergebnis dieser Analysen sind zwei Typen von Gesamtstrukturen, die ich als „Quell"-Struktur und „Bassin"-Struktur bezeichne. Auch diese globalen argumentativen Strukturen der Beweisdiskurse sind in Vergleichen von allen Fällen herausgearbeitet worden.

Quell-Struktur

In Argumentationen mit Quell-Struktur, die sich in den analysierten deutschen Klassen und prototypisch in dem Fall Nissen finden, wird im Beweisdiskurs einer Vielzahl von Begründungen nachgegangen.

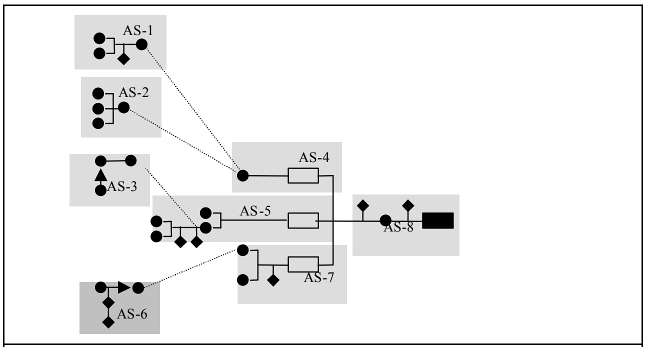


Abb. 5 Gesamtargumentation des Typs „Quell-Struktur"

Verschiedene Argumentationen werden entwickelt und aufgegriffen. Begründungsangebote von Schülerinnen und Schülern werden öffentlich verhandelt, gegebenenfalls zurückgewiesen, wenn diese nicht stichhaltig sind. So z.B. wird die Vermutung von Sascha, dass je zwei Dreiecke ein Quadrat bilden, aufgegriffen und widerlegt.

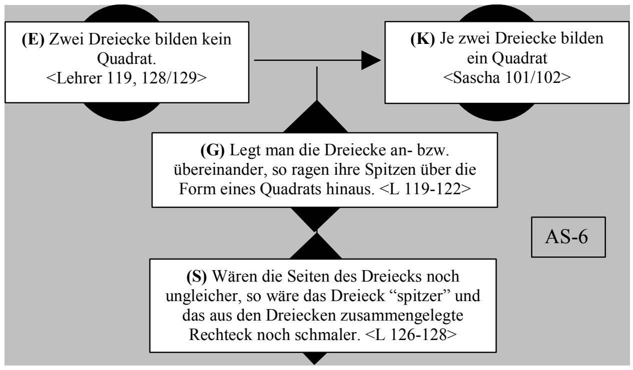


Abb. 6 Widerlegung von Saschas Vermutung

Mehrere Begründungen für eine Aussage werden zugelassen, es entwickeln sich Parallelargumentationen, auf die ich an dieser Stelle aus Zeitgründen nicht näher eingehe. In diesen Argumentationen werden mathematische Begriffe und Zusammenhänge insbesondere inhaltlich erörtert. Begründungen haben hier eine wissensentwickelnde Funktion.

Bassin-Struktur

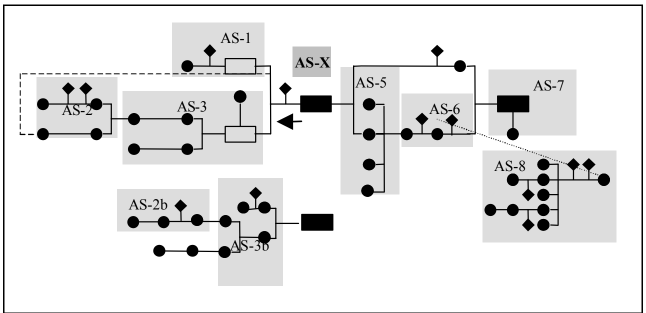


Abb. 7 Gesamtargumentation des Typs „Bassin-Struktur"

In Argumentationen mit Bassin-Struktur, die ich prototypisch am Fall Pascal entwickelt habe und die ich ausschließlich in den analysierten französischen Stunden gefunden habe, werden Argumentationsstränge einerseits linear vorwärts entwickelt und andererseits wird durch abduktive Schlüsse quasi rückwärts auf Aussagen geschlossen, welche den nächsten Argumentationsstrang strukturieren, siehe dazu AS-X in den beiden Abbildungen auf der Folie.

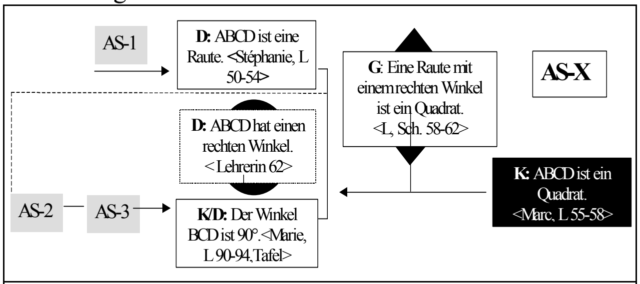


Abb. 8 Fall Pascal – Abduktion

Aus Zeitgründen kann ich auch darauf hier nur hinweisen und dies nicht näher ausführen. Es wird in diesen abduktiven Schlüssen auf Voraussetzungen zurückgegangen, von denen aus wieder vorwärts geschlossen wird. Dabei entsteht ein Argumentationsfluss, der von Ziel-Konklusionen vorwärts und rückwärts gerichtet ist. Diese Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen lassen sich durch die Metapher eines Bassins beschreiben. Wie in einem Staubecken (Bassin) wird ein Fluss zurückgehalten und dadurch geklärt. Beweisdiskurse dieser Struktur erwecken den Eindruck von Geschlossenheit. Auch darauf wird durch die Metapher des Bassins angespielt.

Typen unterrichtlicher Beweisdiskurse

Ausgehend von den Argumentationsanalysen habe ich zwei Typen unterrichtlicher Beweisdiskurse rekonstruiert. Dabei unterscheide ich einen kontemplativen Stil, der als anschauendes Deuten bezeichnet wird, und einen diskursiven Stil, der als öffentliches Begründen benannt wird. Anschauendes Deuten und öffentliches Begründen charakterisieren zwei unterschiedliche Beweisdiskurse.

Anschauendes Deuten – der kontemplative Stil

Leitmotiv des Beweisdiskurses, den ich als „anschauendes Deuten" charakterisiert habe und der im Unterricht des Typs „einsehen, dass", also im Prototyp Nissen, rekonstruiert werden konnte, ist das ‚Sehen'. In der folgenden Unterrichtsszene (N5, Zeile 43-49) wird dieses latente Motiv manifest (siehe auch Abb. 2).

Lehrerin: Mmh. Wissen wir noch nicht genau, was wir in die Mitte schreiben. Aber das, weißt du was ich jetzt an deiner Antwort sehr gut finde ist, dass du hier Quadrate suchst, die irgenwie so'n Flächenmaß haben. Aber von dem inneren Quadrat wissen wir die Kantenlänge noch nicht genau. b Quadrat wäre n'en Quadrat, was hier drüber irgendwie, ne ...

Maren: Mmh.

Lehrerin: ... das geht ja nicht gut. Vielleicht findet ihr was anderes, Sarah nicht schreiben, nicht schreiben, nur denken, nur gucken. Aufschreiben können wir das immer noch. Jan.

‚Sehen' wird in den analysierten Unterrichtsepisoden, was auch in dem hier dargestellten Transkript deutlich wird, in einem doppelten Sinne verstanden. Einerseits ist eine empirisch-anschauliche Interpretation von Aussagen gemeint. Sachverhalte werden gegenständlich veranschaulicht, mathematische Eigenschaften und Beziehungen werden an konkrete Zeichnungen gebunden und als sinnlich erfahrbar aufgefasst. Andererseits werden Aussagen gedanklich „vor Augen geführt", d.h. anschaulich bzw. kontemplativ erfasst. Konkrete Abbildungen werden als Repräsentationen von geometrischen Eigenschaften und allgemeingültigen Beziehungen verstanden. Konklusionen werden, sofern dies möglich ist, empirisch-anschaulich an- und einsehbar gemacht. Zugleich wird ein argumentativer Zusammenhang zwischen Daten und Konklusion behauptet. Die Konklusion wird *anschaulich* begründet, dabei bleiben Garanten in der Regel implizit. Dies ist typisch für *anschauliche* Argumentationen, in denen allgemeingültige Beziehungen sinnlich und gedanklich zugleich ‚gesehen' werden sollen. Auch sind empirisch-anschauliche Deutungen von Aussagen ihren Begründungen nicht nachgeordnet, sondern werden als diese ergänzend behandelt. Die Beweisfigur steht am Anfang des *anschauend-deutenden* Beweisdiskurses. Von dieser aus soll eine allgemeine Beziehung gedeutet und begründet werden. Die anschaulich-visuelle Suggestion eines Zusammenhangs ist der Ansatzpunkt seiner Begründung. Die einzelnen Ausdrücke werden vom Ganzen her betrachtet, die Beweisstrategie von dort aus entwickelt. Die Gesamtargumentation dieses Typs von Beweisdiskurs ist geprägt durch eine Struktur, die ich als „Quell-Struktur" bezeichnet habe. Diese ist durch eine Viel-Gliedrigkeit in der ersten Phase des Beweisdiskurses und das Zusammenfließen verschiedener Argumentationsstränge zu einem Strom in der zweiten Phase geprägt. Die argumentative Struktur ist zunächst sehr offen. Parallelargumentationen und mitunter sich widerstreitende Konklusionen werden entwickelt. In verschiedenen Argumentationssträngen werden Konklusionen begründet und so aus mehreren Perspektiven „anschaulich" gedeutet. Die Art der Argumentationen und die Gesamtstruktur dieses Typs von Beweisdiskurs charakterisieren einen Beweisdiskurs, den ich als „anschauendes Deuten" bezeichnet habe. Dieser Typ repräsentiert ein kontemplatives Wissensverständnis, das die Beweisprozesse in den analysierten deutschen Klassen prägt.

„Öffentliches Begründen" – der diskursive Stil

Leitmotiv dieses Typs von Beweisdiskurs, der im Unterricht des Typs „begründen, warum" rekonstruiert werden konnte, also beim Prototyp Pascal, ist das ‚(Aus-)Sagen'. Datum, Konklusion und Garant werden in den Argumentationen dieses Beweisdiskurses sprachlich gefasst und mündlich relativ vollständig und explizit geäußert sowie zudem schriftlich an der Tafel festgehalten. Auf diese Weise werden Geltungsansprüche und ihre Begründung öffentlich dokumentiert und festgeschrieben. Dieses latente Motiv wird in folgender Unterrichtsszene (P3, Zeile 123-132) expliziert (siehe auch Abb. 3).

Thierry : DCH et BCG. [Die Winkel DCH und BCG]

Professeur : # Sont .. [Sind …]

Thierry : DCH sont complémentaires. [DCH sind komplementär.]

Professeur : Oui. (9 sec.) Ensuite, sont complémentaires, t'as écrit ? Oui ? Alors ? [Ja. Und dann, sind komplementär, hast du das aufgeschrieben ? Ja? Also?]

Stephanie : On écrit que C, donc l'angle C est égal à 180 moins ... [Man schreibt, dass C, also der Winkel C ist gleich 180 minus …]

Professeur: Il faut d'abord dire que HC, pourquoi 180 ? [Man muss erst sagen, dass HC, warum 180 ?]

Stephanie: 180, parce que c'est plat. [180, weil der gestreckt ist.]

Professeur: Eh, il faut dire le quand même, eh ? On l'a pas encore dit. On l'a dit nous, mais on l'a pas écrit. <u>Dans la démonstration il faut écrire tout ce qu'on a dit</u>, donc tu vas à la ligne, voilà HCG égale 180 degrés. [Eh, man muß das dennoch sagen, he ? Wir haben das noch nicht gesagt. Wir haben es gesagt, aber nicht aufgeschrieben. In einem Beweis muß man alles aufschreiben, was man gesagt hat, also, nächste Zeile, genau HCG ist gleich 180 Grad.]

Die Verschriftlichung von Argumentationen forciert in Beweisdiskursen diesen Typs den sprachlich geprägten Stil. Der Status von Daten, Konklusionen, wie auch Garanten wird im Beweisdiskurs meist angezeigt, indem z.B. explizit gemacht wird, durch welche Aussage eine andere begründet wird. Formale linguistische Markierungen (z.B. ‚also', ‚Konklusion') werden dabei allerdings weder schriftlich noch mündlich verwendet. Charakteristisch für diesen Beweisdiskurs ist, dass die Ziel-Konklusion der Argumentation durch eine Kette von vorausgehenden Aussagen schrittweise gefolgert und begründet wird. Aus Daten wird eine Konklusion gefolgert, die im nächsten Argumentationsschritt dieser Kette als Datum wiederverwendet wird. In Beweisdiskursen dieses Typs werden Konklusionen *begrifflich* erschlossen. Der Übergang von Daten zur Konklusion wird durch einen Begriff oder durch einen begrifflich formulierten Zusammenhang begründet. Zugrundegelegte begriffliche Garanten werden in derartigen Argumentationen entweder explizit genannt oder durch den Schluss selbst manifestiert. Daten werden in Argumentationen dieses Beweisdiskurses mitunter anhand von Zeichnungen veranschaulicht, doch die aus ihnen gefolgerten Konklusionen werden nicht „anschaulich", sondern „begrifflich" vollzogen. Expliziert werden in „begrifflichen" Argumentationen insbesondere auch ihre Garanten. Dies gilt insbesondere für algebraische Argumentationen. Die argumentative Gesamtstruktur dieses Typs von Beweisdiskurs kann als „Bassin-Struktur" beschrieben werden. Die damit verbundene geschlossene Struktur ist durch eine abduktive Argumentation hervorgerufen, die durch eine Etappenziel-Aussage eingeleitet wird. Die endgültige Ziel-Aussage und die Etappenziel-Aussagen strukturieren die Gesamtargumentation des Beweisdiskurses. Durch das Ineinandergreifen von mündlichen und schriftlichen Argumentationen wird ebenfalls ein eher geschlossener und stringenter Charakter des Beweisdiskurses geprägt. Dies alles charakterisiert den diskursiven Charakter dieses Beweisdiskurses, der die Beweisprozesse in den analysierten französischen Klassen prägt.

Ausblick

Die Vielfalt und Unterschiedlichkeit von Kontexten und Argumentationen in Beweisprozessen, die ich am Beispiel desselben mathematischen Themenbereichs, des Satzes von Pythagoras, herausgearbeitet habe, zeigt, dass sich mathematische Lehr- und Lernprozesse in der Praxis substantiell unterscheiden. Diese Unterschiede charakterisieren verschiedene Arten von Wissensentwicklung und –begründung, die ein *kontemplatives* und ein *diskursives* Wissensverständnis kennzeichnen. Mathematikunterricht zeigt sich damit nicht als kontextunabhängig, nicht als a- bzw. überkulturell. Schülerinnen und Schüler lernen in und durch Unterricht unterschiedliches mathematisches Wissen und verschiedene Wissenspraktiken. Es ist deutlich und überraschend zugleich, wie deutlich sich die analysierten französischen und deutschen Unterrichtssituationen voneinander unterscheiden. Die Relevanz dieser Unterschiede für Lehr- und Lernprozesse wird deutlich. Mögliche Erklärungen, die nicht Anliegen der vorliegenden Arbeit waren, lassen sich nur durch weitere Forschungsarbeiten aufzeigen, die neben bildungstheoretischen und –historischen auch wissenssoziologische Arbeiten in den Blick nehmen.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag, um qualitative Unterschiede in der Wissensentwicklung und –begründung und ihre Bedeutung und Konstitution in der Unterrichtspraxis des Mathematikunterrichts besser zu verstehen. Das Potential internationaler Unterrichtsforschung wird dabei gewinnbringend genutzt. Weitere Forschung in diese Richtung scheint mir ein interessantes empirisches Feld für die Mathematikdidaktik.

Die vorliegende Arbeit bietet methodische Zugänge an, um Unterschiede in unterrichtlichen Beweispraktiken und –prozessen zu analysieren. Kontext- und Argumentationsanalysen wie auch die komparativen Analysen bieten einen Rahmen, um Unterrichtsprozesse inhaltlich und methodisch zu reflektieren. Die entwickelten Methoden und Ergebnisse liefern eine Basis, um Unterschiede zwischen Beweisprozessen im Unterricht und ihre didaktische Bedeutung zu thematisieren.

Die Ergebnisse meiner Dissertation zeigen auch, dass öffentliche Geltungsansprüche in der Unterrichtspraxis nicht individuell und nur bedingt in kleineren Gruppen geleistet werden. Der öffentliche Raum der Klasse ist hier der Ort, an dem Geltungsansprüche verhandelt werden. Inwieweit die öffentliche Akzeptanz von Beweisen und Begründungen auch individuell vollzogen wird, war nicht Anliegen meiner Arbeit. Weitere Forschungsarbeiten sind erforderlich, die individuelle Lern- und Bildungsprozesse im „öffentlichen Raum" des Klassenzimmers in den Blick nehmen. Interviews mit einzelnen Lernenden und Gruppeninterviews mit Jugendlichen scheinen hier vielversprechend (siehe Jablonka & Keitel 2002).

Meine Analysen machen deutlich, auch wenn dies nicht der Fokus meiner Arbeit war, dass kollektive Beweisprozesse im Unterricht zudem durch ein a-symmetrisches Verhältnis in der Begründung von Geltungsansprüchen geprägt sind. Es ist eine offene Frage, inwieweit die damit verbundene Arbeitsteilung von Lehrenden und Lernenden produktiv oder kontraproduktiv im Hinblick auf individuelle Lernprozesse wirkt. Hierfür wären Arbeiten aufschlussreich, die stärker eine soziologische, auf Interaktionen ausgerichtete Perspektive untersuchen. Arbeiten wie die von Herbst (1998) bieten hier eine vielversprechende Basis.

Literatur

Alexander, R. et al., (1999) (Hrsg.). Learning from Comparing: new directions in comparative educational research. Volume 1: Contexts, Classrooms and Outcomes. Oxford: Symposium Books.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. In: Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). Une Étude des Processus de Preuve en Mathématique chez les Élèves de Collège. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Broadfoot, P. et al. (2000). Promoting Quality in Learning. Does England Have the Answer? London, New York: Cassell.

Cogan, L. S. & Schmidt, W. H. (1999). An Examination of Instructional Practices in Six Countries. In: G. Kaiser; E. Luna & I. Huntley (Hrsg.), International Comparisons in Mathematics Education. London: Falmer, 68-85.

Flick, U. (1995). Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendungen in Psychologie

Gerhardt, U. (1991). Gesellschaft und Gesundheit. Begründung der Medizinsoziologie. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Hanna, G. (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski und M. Artigue (Hrsg.), Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Paris: Université de Paris, Bd. 2, 45-51.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. In: L. Puig und A. Gutierrez (Hrsg.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Valencia: University of Valencia, Bd. 1, 21-34.

Healy, L. & Hoyles, C. (1995) (Hrsg.). Justifying and Proving in school mathematics. Proceedings of International Conference. London: Institute of Education, University of London.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey. London: Institute of Education, University of London.

Heintz, B. (2000). Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien, New York: Springer Verlag.

Herbst, P. G. (1998). What works as proof in the mathematics class. Athens, GA. (USA): The University of Georgia.

Jablonka, E. & Keitel, C. (2002). Mathematics Classroom Practice: The Learners' Perspective. In: C. Lubisi und C. Malcolm (Hrsg.), Proceedings of the 10th Annual Conference of SAARMSTE. Durban.

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Kaiser, G.; Luna, E. & Huntley, I. (1999) (Hrsg.), International Comparisons in Mathematics Education. London, Philadelphia: Falmer Press, 11

Kluge, S. (1999). Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske + Budrich.

Knipping, C. (1999). Proof and Proving Processes: Teaching Geometry in France and Germany. In: M. Neubrand (Hrsg.), Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1999. Bern: Franzbecker Verlag, 289-292.

Knipping, C. (2001). Towards a comparative analysis of proof teaching. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht: Utrecht University, Bd. 3, 249-256.

Knipping, C. (2003) Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis – Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Erscheint in: Franzbecker Verlag, Hildesheim.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim, Basel: Beltz - Deutscher Studienverlag.

Lakatos, I. (1976). Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Mannheim, K. (1931). Ideologie und Utopie. In: K. Mannheim, Wissenssoziologie. Frankfurt a.M.: Klostermann, 227-267.

Pepin, B. (1997). Developing an understanding of mathematics teachers in England, France and Germany: an ethnographic study. Reading: Department of Science and Technology Education, University of Reading.

Pepin, B. (1999). The influence of national cultural traditions on pedagogy: classroom practices in England, France and Germany. In: J. Leach und B. Moon (Hrsg.), Learners and Pedagogy. London: Sage Publications, 124-135.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? In: Philosophia Mathematica, 7(3), 5-41.

Reid, D. (1995). The need to prove. Unveröffentlichte Dissertation, Department of Secondary Education, University of Alberta.

Reid, D. (1999). Needing to explain: The mathematical emotional orientation. In: O. Zaslavsky (Hrsg.), Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Haifa: Department of Education in Technology and Science, Bd. 4, 105-112.

Reiss, K. et al. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), PME 25, Utrecht: Utrecht University, 4, 97-104.

Reiss, K. et al. (2002). Reasoning and Proof in Geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. In: A.D. Cockburn, E. Nardi (Hrsg.), PME 26, Norwich: University of East Anglia, 4, 113-120.

Sekiguchi, Y. (1991). An Investigation on Proofs and Refutations in the Mathematics Classroom. Unveröffentlichte Dissertation, Graduate Faculty. Athens GA.: The University of Georgia.

Toulmin, S. E. (1958). The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Villiers, M. de (1990). The Role and the Function of Proof in Mathematics. In: Pythagoras, 24, 17-24.

Zerssen, D. (1973). Methoden der Konstitutions- und Typenforschung. In: M. Thiel (Hrsg.), Enzyklopädie der geisteswissenschaftlichen Arbeitsmethoden, 9. Lieferung: Methoden der Anthropologie, Anthropologie, Völkerkunde und Religionswissenschaft. München, Wien, Oldenburg, 35-143.

Anmerkung

Die vollständigen Transkripte können von der Autorin angefordert werden.

Autorin

Knipping, Christine, Universität Hamburg, Fachbereich Erziehungswissenschaften, Institut 9, Von-Melle-Park 8, 20146 Hamburg

E-Mail: knipping@erzwiss.uni-hamburg.de